1

FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, CUESTIONES

CURSO 2023/2024   16 de Mayo de 2024

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.

Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.

1[3].- Sea O un operador hermitico en un espacio de Hilbert de dimension 2 que tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 3$. En la base ortogonal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ el autovector correspondiente al autovalor λ_1 es:

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Obtengase la expresion de matricial de O en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

2[3].- Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano:

$$H = \hbar \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right) ,$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal de estados del espacio de Hilbert. En el instante inicial $t = 0$ el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle .$$

Sea $|\psi(t)\rangle$ el vector de estado del sistema en el instante de tiempo $t \geq 0$. ¿Para que valores de t el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es ortogonal al vector de estado inicial $|\psi(0)\rangle$?.

3[2].- Considerese un oscilador armonico unidimensional y sean $|n\rangle$ los autoestados de su hamiltoniano. Obtenganse el resultado de actuar con el operador:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

sobre el estado:

$$|\phi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\phi} |n\rangle ,$$

siendo C una constante de normalizacion y ϕ un numero real positivo.

4[2].- Una particula que se mueve a lo largo del eje x se encuentra en un estado $|\psi\rangle$, en el que el valor medio del operador posicion X es:

$$\langle X \rangle_\psi = q .$$

Sea P el operador momento de la particula. Obtengase el valor medio del operador X en el estado $|\phi\rangle$ dado por:

$$|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} P} |\psi\rangle .$$

Sea O un operador hermítico en un espacio de Hilbert de dimensión 2 que tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 3$. En la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ el autovector correspondiente al autovalor λ_1 es

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obténgase la expresión matricial de O en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

Sea $|\lambda_2\rangle \rightarrow$ autovector de O con autovalor $\lambda_2 = 3$.

$\Rightarrow |\lambda_2\rangle$ debe de ser ortogonal a $|\lambda_1\rangle$.

Como el vector ortogonal a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -b^* \\ a^* \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ -i \end{pmatrix}} \Rightarrow \langle\lambda_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, i)$$

$$\Rightarrow \langle\lambda_2|\lambda_1\rangle = \frac{1}{5}(-2, i)\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-2i + 2i) = 0 \quad \text{OK!}$$

Representación espectral de O

$$O = \lambda_1|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + \lambda_2|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = 4|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + 3|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2|$$

<u>Pero</u>

$$|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}(-i, 2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -i \end{pmatrix}(-2, i) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$O = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + \frac{12}{5} & \frac{8}{5}i - \frac{6}{5}i \\ -\frac{8}{5}i + \frac{6}{5}i & \frac{16}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & 2i \\ -2i & 19 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{O = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 8 & i \\ -i & 19/2 \end{pmatrix}}$$

Un sistema de dos niveles tiene por hamiltoniano

$$H = \hbar\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

siendo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal de estados del espacio de Hilbert. En el instante inicial el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

Sea $|\psi(t)\rangle$ el vector de estado del sistema en el instante de tiempo $t \geq 0$. ¿Para que valores de t el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es ortogonal al vector de estado inicial $|\psi(0)\rangle$?.

Dado que $H = \hbar\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) = \hbar\,\sigma_x$, el operador de evolucion temporal es

$$U(t) = e^{-i/\hbar\, H t} = e^{-i/\cancel{\hbar}\,\cancel{\hbar}\,\sigma_x t} = e^{-i\sigma_x t}$$

$\Rightarrow$

$$U(t) = \cos t - i\,\sigma_x \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \cos t & -i\operatorname{sen} t \\ -i\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos t & -i\operatorname{sen} t \\ -i\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ -i\operatorname{sen} t + i\cos t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \operatorname{sen} t)|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos t - \operatorname{sen} t)|2\rangle}$$

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1| - \frac{i}{\sqrt{2}} \langle 2| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos t + \operatorname{sen} t) |1\rangle + i (\cos t - \operatorname{sen} t) |2\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos t + \cancel{\operatorname{sen} t}) + \frac{1}{2} (\cos t - \cancel{\operatorname{sen} t})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \cos t}$$

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = 0 \iff \cos t = 0$$

$\Rightarrow$ $|\psi(0)\rangle$ y $|\psi(t)\rangle$ son ortogonales cuando $\boxed{t = (2n+1)\pi/2}$

$n = 0, 1, \ldots$

Considerese un oscilador armonico unidimensional y sean $|n\rangle$ los autoestados de su hamiltoniano. Obtengase el resultado de actuar con el operador:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

sobre el estado

$$|\phi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\phi} |n\rangle$$

siendo C una constante de normalizacion y ϕ un numero real positivo

---

$$L|\phi\rangle = C\sum_{m=1}^{\infty} |m-1\rangle\langle m| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\phi}|n\rangle =$$

$$= C \sum_{\substack{m=1\\ n=0}}^{\infty} e^{-n\phi} |m-1\rangle \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{m,n}} = C\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\phi}|m-1\rangle =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ m'=m-1\\ m'=0,\dots,\infty}}{=} C\sum_{m'=0}^{\infty} e^{-(m'+1)\phi}|m'\rangle = e^{-\phi}\, \underbrace{C\sum_{m'=0}^{\infty} e^{-m'\phi}|m'\rangle}_{|\phi\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{L|\phi\rangle = e^{-\phi}|\phi\rangle}$$

$|\phi\rangle \rightarrow$ autoestado de L con autovalor $e^{-\phi}$

Una partícula que se mueve a lo largo del eje x se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ en el que el valor medio de su posición X es q:

$$\langle X\rangle_\psi = q$$

Sea P el operador momento de la partícula. Obténgase el valor medio del operador X en el estado

$$|\phi\rangle = e^{-i/\hbar P}|\psi\rangle$$

$$\langle X\rangle_\phi = \langle\phi|X|\phi\rangle = \langle\psi|e^{i/\hbar P} X e^{-i/\hbar P}|\psi\rangle$$

Como

$$e^{i/\hbar P} X e^{-i/\hbar P} = X + \frac{i}{\hbar}\underbrace{[P,X]}_{-i\hbar} = X + 1$$

Tenemos

$$\langle X\rangle_\phi = \langle\psi|(X+1)|\psi\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle X\rangle_\psi}_{q} + \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle X\rangle_\phi = q+1}$$